

Examen de Ingreso Doctoral - ??/??/2023

Nombre y apellido: _____

1. Sea X, Y espacios metricos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Demuestre que si X es compacto, entonces $f(X)$ es también compacto.

2. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & (x, y) \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

- 2-a. Pruebe que f es continua en $(0, 0)$

- 2-b. Encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ y analise su continuidad en $(0, 0)$.

- 2-c. La función f es diferenciable en $(0, 0)$? En caso afirmativo, encuentre su diferencial en este punto.

3. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado menor o igual a 3 y considere el producto interior

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ de modo que $p(x) = x$ y $q(x) = x + 2ax^2$ sean ortogonales.

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}.$$

SOLUCIONARIO

1. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cobertura por abiertos de $f(X)$. Por continuidad, $f^{-1}(A_\alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in I$. Además,

$$\begin{aligned} x \in X &\implies f(x) \in f(X) = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \implies f(x) \in A_\alpha \text{ para alguno } \alpha \in I \\ &\implies x \in f^{-1}(A_\alpha) \text{ para alguno } \alpha \in I. \end{aligned}$$

Portanto, $X = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha)$ y $\mathcal{B} := \{f^{-1}(A_\alpha), \alpha \in I\}$ es una cobertura por abiertos de X . Como X es compacto, $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita, o sea, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$ satisfaciendo

$$X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\alpha_i}) \implies f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(A_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha_i},$$

o que prueba que $\mathcal{A}$ admite subcobertura finita y portanto $f(X)$ es compacto.

2-a. Una vez que,

$$\left| \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right| \leq 1 \quad \text{and} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0,$$

tenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

y por lo tanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

probando la continuidad de f en $(0, 0)$.

2-b. Si $x = 0$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0.$$

y para $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|} \cos\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Como

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, 0) = -1,$$

tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0, 0)$.

2-c. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ tenemos que

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{|(h,k)|} = \frac{(h^2 + k^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right) = \sqrt{h^2 + k^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right),$$

y por lo tanto

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{|(h,k)|} = 0,$$

probando que f es diferenciable en $(0,0)$ con $f'(0,0) \equiv 0$.

3. Si $p(x) = x$ y $q(x) = x + 2ax^2$, entonces

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 x(x + 2ax^2) dx = \int_0^1 (x^2 + 2ax^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^4}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}.$$

Así, p y q son ortogonales, si y sólo si

$$\langle p, q \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3}.$$

4. Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(x-y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x+y)}_{N(x,y)} dy.$$

Como,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

la ecuación no es exacta. Sin embargo, multiplicando la ecuación por el factor integrante $\frac{1}{x^2+y^2}$, nos fornece la ecuación

$$\underbrace{\frac{x-y}{x^2+y^2}}_{\bar{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}_{\bar{N}(x,y)} dy,$$

con

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \frac{y^2 - 2xy + x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x},$$

que es exacta. Así, la solución es dada implícitamente por $F(x, y) = C$, donde F satisface

$$F(x, y) = \int \bar{M} dx + g(y).$$

Como

$$\int \frac{x-y}{x^2+y^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+y^2} dx - \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{x-y}{x^2+y^2} dx = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{y^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} = \bar{N}(x,y),$$

y así $g(y)$ es constante y concluimos que y es dado implícitamente como función de x en la ecuación

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C$$

Examen de Admisión 2025

Programa de Doctorado en Ciencias con Mención en Matemática
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Universidad de Tarapacá



Nombre _____ RUN _____

Instrucciones

Justifique cada una de sus respuestas.

Tiene 2 horas para resolver el examen.

1. **(8 puntos)** Sea $\mathcal{P}_m$ el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado igual o menor que n . Si $T : \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_m$ definido como

$$Tp(x) = 5p(x) - 4p'(x) + p''(x), \quad \forall p(x) \in \mathcal{P}_m.$$

Encuentre una base para el núcleo y la imagen de T .

2. **(8 puntos)** Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^4 + 6y^8}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) **(8 puntos)** Es f continua en $(0, 0)$? Justifique rigurosamente su respuesta.

b) **(8 puntos)** Qué ocurre con las derivadas parciales de f en $(0, 0)$?

3. **(75 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x^2 + xy}{3xy + y^2}$$

4. **(10 puntos)** Sean (X, d) , (Y, ρ) espacios métricos y $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ una función.

a) **(6 puntos)** Pruebe que si f es continua, entonces la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en (Y, ρ) es un conjunto abierto en (X, d) .

b) **(4 puntos)** Si $K \subset X$ es abierto, el conjunto $f(K)$ es abierto en (Y, ρ) ? Si su respuesta es afirmativa, demuéstrela, y si es negativa exhiba un contraejemplo.



Examen de Admisión 2026
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática
Octubre de 2025

DCM²

Doctorado en Ciencias con
Mención en Matemática

Nombre _____ **Nro. Identidad** _____

Instrucciones

Justifique cada una de sus respuestas.

Tiene 2 horas para resolver el examen.

1. **(20 puntos)** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaciones diferenciables en $a \in U$, tales que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f'(a) = g'(a)$ si y sólo si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{\|h\|} = 0.$$

2. **(20 puntos)** Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si K y L son subconjuntos compactos disjuntos de X , pruebe que existen abiertos disjuntos U, V de X satisfaciendo $K \subset U$ y $L \subset V$.
3. **(20 puntos)** Determine la ecuación de todas las curvas en el plano xy que tengan la propiedad de que el área del triángulo formado por la tangente en un punto de la curva, el eje x y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia sea igual a la mitad del producto de las coordenadas del punto de tangencia.