Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Doctorado en Ciencias con Mención en Matemática

Examen de Admisión

Nombres y Apellidos:

1. [15 ptos] Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $F : X \to X$ una aplicación que preserva la métrica. Pruebe que $F(X) = X$.

2. [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$ satisfaciendo $|f'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la función,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x)),$$

es un difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.

3. [15 ptos] Sea $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal que satisface

$$T(e_1) = 3e_1 + ie_2, \quad T(e_2) = -ie_1 + 3e_2, \quad T(e_3) = 4e_3, \quad \text{con} \quad i^2 = -1.$$

   (a) Determine la matriz de T en la base canónica.

   (b) Encuentre los valores y vectores propios de T.

4. [15 ptos] Una curva que tiene una pendiente dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, pasa por el punto $(2, 1)$. Determine su ecuación de la curva.

Examen de Ingreso Doctoral - ??/??/2023

Nombre y apellido:_____

1. Sea X, Y espacios metricos y $f : X \to Y$ una función continua. Demuestre que si X es compacto, entonces $f(X)$ es también compacto.

2. Consider la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

2-a. Pruebe que f es continua en $(0,0)$

2-b. Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ y analise su continuidad en $(0,0)$.

2-c. La función f es diferenciable en $(0,0)$? En caso afirmativo, encuentre su diferencial en este punto.

3. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado menor o ecual a 3 y considere el producto interior

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ de modo que $p(x) = x$ y $q(x) = x + 2ax^2$ sean ortogonales.

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}.$$

SOLUCIONARIO

1. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cobertura por abiertos de $f(X)$. Por continuidad, $f^{-1}(A_\alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in I$. Además,

$$x \in X \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in f(X) = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in A_\alpha \quad \text{para alguno } \alpha \in I$$

$$\Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(A_\alpha) \quad \text{para alguno } \alpha \in I.$$

Portanto, $X = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$ y $\mathcal{B} := \{f^{-1}(A_\alpha), \alpha \in I\}$ es una cobertura por abiertos de X. Como X es compacto, $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita, o sea, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$ satisfaciendo

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\alpha_i}) \quad \Longrightarrow \quad f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(A_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i},$$

o que prueba que $\mathcal{A}$ admite subcobertura finita y portanto $f(X)$ es compacto.

2-a. Una vez que,

$$\left|\operatorname{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq 1 \quad \text{and} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0,$$

tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 \operatorname{sin}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

y por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

probando la continuidad de f em $(0,0)$.

2-b. Si $x = 0$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sin}\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0.$$

y para $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \operatorname{sin}\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Como

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0, \quad n \to +\infty \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_n,0) = -1,$$

tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

2-c. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ tenemos que

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{|(h,k)|} = \frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right),$$

y por lo tanto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{|(h,k)|} = 0,$$

probando que f es diferenciable en $(0,0)$ con $f'(0,0) \equiv 0$.

3. Si $p(x) = x$ y $q(x) = x + 2ax^2$, entonces

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 x(x+2ax^2)dx = \int_0^1 (x^2+2ax^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}.$$

Así, p y q son ortogonales, si y sólo si

$$\langle p, q\rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = -\frac{2}{3}.$$

4. Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{(x-y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x+y)}_{N(x,y)}dy.$$

Como,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

la ecuación no es exacta. Sin embargo, multiplicando la ecuación por el factor integrante $\frac{1}{x^2+y^2}$, nos fornece la la ecuación

$$\underbrace{\frac{x-y}{x^2+y^2}}_{\bar{M}(x,y)}dx + \underbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}_{\bar{N}(x,y)}dy,$$

con

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y} = \frac{y^2 - 2xy + x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial \bar{N}}{\partial x},$$

que es exacta. Así, la solución es dada implicitamente por $F(x,y) = C$, donde F satisface

$$F(x,y) = \int \bar{M}dx + g(y).$$

Como

$$\int \frac{x-y}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+y^2}dx - \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{x-y}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2} = \bar{N}(x,y),$$

y así $g(y)$ es constante y concluiemos que y es dado implicitamente como función de x en la ecuación

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C$$

Examen de Admisión 2025
Programa de Doctorado en Ciencias con Mención en Matemática
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Universidad de Tarapacá

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

Nombre _____ **RUN** _____

Instrucciones
Justique cada una de sus respuestas.
Tiene 2 horas para resolver el examen.

1. **(8 puntos)** Sea $\mathcal{P}_m$ el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado igual o menor que n. Si $T : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ definido como

$$Tp(x) = 5p(x) - 4p'(x) + p''(x), \quad \forall p(x) \in \mathcal{P}_m.$$

   Encuentre una base para el núcleo y la imagen de T.

2. **(8 puntos)** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^4+6y^8}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) **(8 puntos)** Es f continua en $(0,0)$? Justifique rigurosamente su respuesta.

   b) **(8 puntos)** Qué ocurre con las derivadas parciales de f en $(0,0)$?

3. **(75 puntos)** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x^2+xy}{3xy+y^2}$$

4. **(10 puntos)** Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos y $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ una función.

   a) **(6 puntos)** Pruebe que si f es continua, entonces la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en (Y,ρ) es un conjunto abierto en (X,d).

   b) **(4 puntos)** Si $K \subset X$ es abierto, el conjunto $f(K)$ es abierto en (Y,ρ)? Si su respuesta es afirmativa, demuéstrelo, y si es negativa exhiba un contraejemplo.