

Examen de Admisión

Nombres y Apellidos:

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [8 ptos] Calcule el núcleo de T ($\text{Ker}(T)$);
- (b) [7 ptos] Calcule la imagen de T .
2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal, con T^* el operador adjunto de T . Suponga que T es un operador normal, esto es, $TT^* = T^*T$. Entonces,
- (a) [8 ptos] Pruebe que $\text{Ker}(T - \lambda) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda})$;
- (b) [7 ptos] Muestre que $\text{Im}(T - \lambda) = \text{Im}(T^* - \bar{\lambda})$
3. [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = T(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2^n} e^{-x} \sin(nx), \text{ para todo } x \in I = [0, \infty)$$

- (a) [7 ptos] Muestre que la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está bien definida en $[0, \infty)$.
- (b) [2 ptos] ¿Es f una función integrable en $[0, \infty)$?
- (c) [6 ptos] ¿Es f derivable en $(0, \infty)$?

Una propuesta de examen Maestria (Ingreso 2024).

Alberto Ramos *

September 24, 2023

MODELO DE EXAMEN

- Caso fuera 4 preguntas, un posible examen seria las preguntas 1, 2, 3, 5
- Caso fuera 4 preguntas, otro posible examen seria las preguntas 1, 2, 3, 6

PREGUNTAS

1. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de coeficientes reales de orden 2 con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ (donde tr es la traza de una matriz y A^T es la matriz traspuesta de A).

Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ generado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcule la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\mathcal{S}$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre una matriz C no nula, tal que $\langle A, C \rangle = 0$.

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 5x_2 + 4x_3).$$

Calcule lo siguiente:

- Calcule la representación matricial de T en la base canonica de $\mathbb{R}^3$;
 - Calcule el nucleo de T , $\ker(T)$, y su dimensión;
 - Calcule la imagen de T , $\text{Im}(T)$, y su dimensión;
 - Calcule el complemento ortogonal de $\text{Im}(T)$, y su dimensión.
3. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de coeficientes reales de orden n . Denote por I la matriz identidad. Pruebe que para toda matriz X suficientemente próximo de I , existe una matriz Y tal que $Y^2 = X$.

*Department of Mathematics, University of Tarapacá, Arica, Chile. Email: aramosf@academicos.uta.cl

4. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq 10\|x - y\|^{3/2}$ para todo x e $y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que F es diferenciable y que F es constante.

5. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una secuencia de números reales tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \beta |a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1,$$

donde $\beta \in (0, 1)$. Pruebe que $\{a_n\}$ es una secuencia convergente.

6. Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_k(x) = 4x^k e^{-kx} \text{ para todo } x \in [0, \infty)$$

(a) Muestre que la serie $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ está bien definida en $[0, \infty)$.

(b) Muestre que la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe y que $\int_a^b f(x)dx \leq 4(b - a)$, para todo intervalo compacto $[a, b] \subset (0, 1]$.

SOLUCIÓNARIO

1. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de coeficientes reales de orden 2 con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ (donde tr es la traza de una matriz y A^T es la matriz traspuesta de A). Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ generado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcule la proyección ortogonal de B sobre el subespacio $\mathcal{S}$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos la formula de proyección ortogonal de B sobre A , ya que $\mathcal{S}$ es generado por un unico elemento. Luego,

$$\text{proj}_{\mathcal{S}}(B) = \text{proj}_A(B) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\|^2} A.$$

Debido al producto interno, vemos que $\langle A, B \rangle = 1$ y $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = 6$.
Substituyendo

$$\text{proj}_A(B) = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\|^2} A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Encuentre una matriz C no nula tal que $\langle A, C \rangle = 0$.

Usando la proyección ortogonal es fácil ver que $C = B - \text{proj}_A(B)$ cumple con lo requerido.

$$C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -2 & -14 \end{pmatrix}.$$

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 5x_2 + 4x_3).$$

Calcule lo siguiente:

- Calcule la representación matricial de T en la base canonica de $\mathbb{R}^3$;

La representación matricial de T es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Calcule el nucleo de T , $\ker(T)$, y su dimensión;

El nucleo de T es

$$\text{Ker}(T) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la dimensión es 1.

- Calcule la imagen de T , $\text{Im}(T)$, y su dimensión;

Del teorema del nucleo y imagen, $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = 3$. Así, $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Una posibilidad es escribir la imagen de T como

$$\text{Im}(T) = \text{generado por } \{(1 \ 0 \ 10), \ (0 \ 1 \ 3)\}.$$

- Calcule el complemento ortogonal de $\text{Im}(T)$.

Sabemos que $\text{Im}(T)^\perp = \text{Ker}(T^t)$. Así, calculando tenemos que

$$\text{Ker}(T^t) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la dimensión es 1.

3. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de coeficientes reales de orden n . Denote por I la matriz identidad. Pruebe que para toda matriz X suficientemente próximo de I , existe una matriz Y tal que $Y^2 = X$.

Defina $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ como $f(X) = X^2$. Ciertamente, f es una función de clase C^∞ (cada coordenada de f viene de multiplicación de polinomios). Derivando la función f tenemos que $Df(Z)V = ZV + VZ$ para todo V . Así, si $Z = I$ la derivada es $Df(I)V = 2V$ y por lo tanto invertible. Usando el [teorema de función inversa](#) a la función f tenemos que para todo X suficientemente próximo de $f(I) = I^2 = I$, existe una matriz Y (próximo de I) tal que $f(Y) = X$ (i.e, $Y^2 = X$).

4. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq 10\|x - y\|^{3/2}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que F es diferenciable y que F es constante.

Si F fuese derivable, entonces $DF(x)v$ coincide con la derivada direccional. Luego, como vale

$$\left\| \frac{F(x + tv) - F(x)}{t} \right\| \leq 10 \frac{1}{t} \|tv\|^{3/2} = 10t^{1/2} \|v\|^{3/2}, \text{ para } t > 0,$$

concluimos que la derivada debe ser cero. El hecho de ser constante viene de que la derivada seria nula en todos los puntos. Para probar que F es diferenciable, basta ver que

$$\frac{\|F(x + v) - F(x) - DF(x)v\|}{\|v\|} = \frac{\|F(x + v) - F(x)\|}{\|v\|} \leq 10 \frac{\|v\|^{3/2}}{\|v\|} = 10\|v\|^{1/2} \rightarrow 0,$$

uniformemente para todo v .

5. Sea $\beta \in (0, 1)$, y considere una secuencia de numeros reales $\{a_n\}$ tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \beta |a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1.$$

Pruebe que $\{a_n\}$ converge.

Vamos probar que la secuencia $\{a_n\}$ es una secuencia de Cauchy. Primero escriba $a_{m+k} - a_k = (a_{m+k} - a_{m+k-1}) + (a_{m+k-1} - a_{m+k-2}) + \cdots + (a_{k+1} - a_k)$, y tomando valor absoluto

$$|a_{m+k} - a_k| \leq |a_{m+k} - a_{m+k-1}| + \cdots + |a_{k+1} - a_k| \leq \left(\sum_{i=k-1}^{m+k-2} \beta^i \right) |a_2 - a_1|,$$

para $k \geq 2$, $m \geq 1$ (o algo similar). De cualquier manera, como $\sum \beta^n$ es sumable ($\beta \in (0, 1)$), tenemos que usando la desigualdad anterior la secuencia $\{a_n\}$ es una secuencia de Cauchy y por lo tanto converge.

6. Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_k(x) = 4x^k e^{-kx}, \text{ para todo } x \in [0, \infty)$$

- (a) Muestre que la serie $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ está bien definida en $I = [0, \infty)$.

Observe que $x - \ln(x) \geq 1$ para todo $x > 0$. Así, tenemos que

$$x^k e^{-kx} = e^{-k(x - \ln(x))} \leq e^{-k}, \text{ para todo } x > 0.$$

Usando el [criterio M de Weierstrass](#) (desde que $\{e^{-k}\}$ es sumable) tenemos que f está bien definida en $(0, \infty)$. Si $x = 0$, claramente $f_k(0) = 0, \forall k$. Así, f está bien definida en $[0, \infty)$.

- (b) Muestre que la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe y que $\int_a^b f(x)dx \leq 4(b-a)$, para todo intervalo compacto $[a, b] \subset (0, 1]$.

Observe que $f_k(x) = 4x^k e^{-kx}$ en $x \in D = [a, b]$ es integrable para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que en $[a, b] \subset (0, 1]$, se cumple que $x^k \leq 1$ y $e^{-kx} \leq 1$, por lo tanto $f_k(x) \leq 4$ en D . Ahora, como la convergencia es uniforme en D (debido al ítem anterior) concluimos que f es integrable y

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)dx \leq \lim_k \int_a^b 4 \cdot dx \leq 4(b-a).$$

EXAMEN DE ADMINSIÓN
MAGISTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN MATEMÁTICA.

Problema 1. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -A$. Demuestre que

- (a) $A^{2k} = -A$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- (b) $A + A^3 + A^5 + \dots + A^{2k+1} = (k+1)A$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con matrix asociada:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule el núcleo ($\text{Ker}(T)$) e imagen ($\text{Im}(T)$) de T .
- (b) Si $k = 1$, calcule T^{-1} si existe.

Problema 3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Pruebe que si h es continua, entonces $h(K)$ es compacto.

Problema 4. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Pruebe que si h es localmente Lipschitz continua, entonces h es Lipschitz continua en K , es decir, existe $L > 0$ tal que

$$|h(x) - h(y)| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in K. \quad (1)$$

Solución.

1-. a) Por inducción.

(i) Para $k = 1$ tenemos que $A^{2k} = A^2 = -A$ por hipótesis.

(ii) Supongamos ahora que $A^{2k} = -A$, Luego,

$$A^{2(k+1)} = A^{2k}A^2 = (-A)(A^2) = (-A)(-A) = -A^2 = A,$$

donde en la 2da desigualdad se uso hipótesis de inducción y en 3ra desigualdad se uso hipótesis inicial.

Por lo tanto, de (i) y (ii) se tiene lo deseado.

b) Simplemente observe que:

$$A^{2i+1} = A^{2i}A = (-A)A = -A^2 = A, \forall i \in \mathbb{N},$$

donde la segunda igualdad es por la parte a). Luego,

$$\sum_{i=0}^k A^{2i+1} = \sum_{i=0}^k A = (k+1)A,$$

y el resultado se tiene.

2-. a) Observe que $T(x, y, z) = (x - y + z, y + 3z, ky + 7z)$. Luego,

(i) Si $k \neq \frac{7}{3}$, entonces $\text{Ker}(T) = (0, 0, 0)$ e $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

(ii) Si $k = \frac{7}{3}$, entonces $\text{Ker}(T) = \langle \{(-4, -3, 1)\} \rangle$. Aplicando operaciones elementales de columnas sobre $[T]$ con $k = \frac{7}{3}$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{3} & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\text{Im}(T) = \langle \{(1, 0, 0), (-1, 1, \frac{7}{3})\} \rangle$.

b) Si $k = 1$, entonces

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aquí $\text{Det}([T]) = 4$ y luego (usando operaciones elementales)

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Por ende, $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ esta dada por,

$$T^{-1}(x, y, z) = (x + 2y - \frac{3}{4}z, \frac{7}{4}y - \frac{3}{4}z, -\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z).$$

- 3-. Sea $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq h(K)$. Entonces existe $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$ con $y_k = h(x_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, existe $\{x_k^1\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k^1 \rightarrow \bar{x} \in K$ cuando $k \rightarrow +\infty$, y como h es continua, $h(\bar{x}) \in h(K)$. Sea $\bar{y} = h(\bar{x})$. Luego,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k^1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} h(x_k^1) = h\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^1\right) = h(\bar{x}) = \bar{y} \in h(K).$$

Probando así que $h(K)$ es compacto.

- 4-. Como h es localmente Lipschitz continua, para todo $x_0 \in K$, existe $\delta(x_0) > 0$ y $L(x_0) > 0$ tal que

$$|h(y) - h(y')| \leq L(x_0)\|y - y'\|^2, \quad \forall y, y' \in \mathbb{B}(x_0, \delta(x_0)). \quad (2)$$

Si esto se tiene para todo $x_0 \in K$, las correspondientes bolas $B(x_0, \delta(x_0))$ serán un cubrimiento del conjunto compacto K , pues

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \delta(x)), \quad \text{con } \delta(x) > 0.$$

Como K es compacto, todo cubrimiento de K posee un subcubrimiento finito, y por ende, existen $x_i \in K$, $\delta_i > 0$ and $L_i > 0$ for all $i \in I := \{1, \dots, \ell\}$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \delta_i),$$

y

$$|h(y) - h(y')| \leq L_i\|y - y'\|^2, \quad \forall y, y' \in \mathbb{B}(x_i, \delta_i), \quad \forall i \in I.$$

Sean $x, x' \in K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \delta_i)$. Luego el segmento $[x, x'] \subseteq K$ puede ser descrito por subsegmentos con puntos finales $x_0 := x, \dots, x_i, \dots, x_\ell := x'$. Ordenando adecuadamente los puntos x'_i s, tendremos

$$\|x - x'\| = \sum_{i=1}^{\ell} \|x_i - x_{i-1}\|. \quad (3)$$

Además,

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x')| &= |h(x_0) - h(x_1) + h(x_1) - \dots - h(x_{\ell-1}) + h(x_{\ell-1}) - h(x_\ell)| \\ &\leq L_1\|x_0 - x_1\| + L_2\|x_1 - x_2\| + \dots + L_\ell\|x_{\ell-1} - x_\ell\| \\ &\leq \max_{i \in I} \{L_i\} \sum_{i=1}^{\ell} \|x_i - x_{i-1}\| \\ &= L\|x - x'\|, \end{aligned}$$

con $L := \max_{i \in I} \{L_i\}$.