Examen de Admisión

Nombres y Apellidos:

1. [15 ptos] Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $F : X \to X$ una aplicación que preserva la métrica. Pruebe que $F(X) = X$.

2. [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$ satisfaciendo $|f'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la función,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x)),$$

es un difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.

3. [15 ptos] Sea $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal que satisface

$$T(e_1) = 3e_1 + ie_2, \quad T(e_2) = -ie_1 + 3e_2, \quad T(e_3) = 4e_3, \qquad \text{con} \qquad i^2 = -1.$$

(a) Determine la matriz de T en la base canónica.

(b) Encuentre los valores y vectores propios de T.

4. [15 ptos] Una curva que tiene una pendiente dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, pasa por el punto $(2, 1)$. Determine su ecuación de la curva.

29 de Diciembre de 2022

Examen de Ingreso Doctoral - ??/??/2023

Nombre y apellido:____

1. Sea X, Y espacios metricos y $f : X \to Y$ una función continua. Demuestre que si X es compacto, entonces $f(X)$ es también compacto.

2. Consider la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

2-a. Pruebe que f es continua en $(0,0)$

2-b. Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ y analise su continuidad en $(0,0)$.

2-c. La función f es diferenciable en $(0,0)$? En caso afirmativo, encuentre su diferencial en este punto.

3. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado menor o ecual a 3 y considere el producto interior

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ de modo que $p(x) = x$ y $q(x) = x + 2ax^2$ sean ortogonales.

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}.$$