UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Magíster en Ciencias con Mención en Matemática

# Examen de Admisión

**Nombres y Apellidos:**

**1.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) [8 ptos] Calcule el núcleo de $T$ $(Ker(T))$;

(b) [7 ptos] Calcule la imagen de $T$.

**2.** Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \to V$ un operador lineal, con $T^*$ el operador adjunto de $T$.

Suponga que $T$ es un operador normal, esto es, $TT^* = T^*T$. Entonces,

(a) [8 ptos] Pruebe que Ker $(T - \lambda) =$ Ker $(T^* - \bar{\lambda})$;

(b) [7 ptos] Muestre que Im $(T - \lambda) =$ Im $(T^* - \bar{\lambda})$

**3.** [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^1$ tal que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = T(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

**4.** Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2^n} e^{-x} \text{sen}(nx), \text{ para todo } x \in I = [0, \infty)$$

(a) [7 ptos] Muestre que la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está bien definida en $[0, \infty)$.

(b) [2 ptos] ¿Es $f$ una función integrable en $[0, \infty)$?

(c) [6 ptos] ¿Es $f$ derivable en $(0, \infty)$?

# Una propuesta de examen Maestria (Ingreso 2024).

Alberto Ramos *

September 24, 2023

## MODELO DE EXAMEN

- **Caso fuera 4 preguntas, un posible examen seria las preguntas 1, 2, 3, 5**
- **Caso fuera 4 preguntas, otro posible examen seria las preguntas 1, 2, 3, 6**

## PREGUNTAS

1. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de coeficientes reales de orden 2 con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$ ( donde tr es la traza de una matriz y $A^T$ es la matriz traspuesta de $A$).

   Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ generado por la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   - Calcule la proyección ortogonal de $B$ sobre el subespacio $\mathcal{S}$, donde
   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   - Encuentre una matriz $C$ no nula, tal que $\langle A, C\rangle = 0$.

2. Sea la trasformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:
   $$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 5x_2 + 4x_3).$$
   Calcule lo siguiente:
   - Calcule la representación matricial de $T$ en la base canonica de $\mathbb{R}^3$;
   - Calcule el nucleo de $T$, $\ker(T)$, y su dimensión;
   - Calcule la imagen de $T$, $\mathrm{Im}(T)$, y su dimensión;
   - Calcule el complemento ortogonal de $\mathrm{Im}(T)$, y su dimensión.

3. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de coeficientes reales de orden $n$. Denote por $I$ la matriz identidad. Pruebe que para toda matriz $X$ suficientemente próximo de $I$, existe una matriz $Y$ tal que $Y^2 = X$.

*Department of Mathematics, University of Tarapacá, Arica, Chile. Email: aramosf@academicos.uta.cl

4. Sea $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $\|F(x) - F(y)\| \leq 10\|x - y\|^{3/2}$ para todo $x$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $F$ es diferenciable y que $F$ es constante.

5. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una secuencia de números reales tal que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \beta |a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1,$$

donde $\beta \in (0, 1)$. Pruebe que $\{a_n\}$ es una secuencia convergente.

6. Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_k(x) = 4x^k e^{-kx} \text{ para todo } x \in [0, \infty)$$

(a) Muestre que la serie $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ está bien definida en $[0, \infty)$.

(b) Muestre que la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe y que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 4(b - a)$, para todo intervalo compacto $[a, b] \subset (0, 1]$.