Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Magíster en Ciencias con Mención en Matemática

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

Examen de Admisión

Nombres y Apellidos:

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) [8 ptos] Calcule el núcleo de T $(Ker(T))$;

(b) [7 ptos] Calcule la imagen de T.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita con producto interno. Sea $T : V \to V$ un operador lineal, con T^* el operador adjunto de T.

Suponga que T es un operador normal, esto es, $TT^* = T^*T$. Entonces,

(a) [8 ptos] Pruebe que $\text{Ker } (T - \lambda) = \text{Ker } (T^* - \bar{\lambda})$;

(b) [7 ptos] Muestre que $\text{Im } (T - \lambda) = \text{Im } (T^* - \bar{\lambda})$

3. [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 tal que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = T(x) + a$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Considere la secuencia de funciones definidas por

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2^n} e^{-x} \text{sen}(nx), \text{ para todo } x \in I = [0, \infty)$$

(a) [7 ptos] Muestre que la función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está bien definida en $[0, \infty)$.

(b) [2 ptos] ¿Es f una función integrable en $[0, \infty)$?

(c) [6 ptos] ¿Es f derivable en $(0, \infty)$?

29 de Diciembre de 2022