Universidad de Tarapacá
Facultad de Ciencias - Departamento de Matemática
Doctorado en Ciencias con Mención en Matemática

Examen de Admisión

Nombres y Apellidos:

1. [15 ptos] Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $F : X \to X$ una aplicación que preserva la métrica. Pruebe que $F(X) = X$.

2. [15 ptos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$ satisfaciendo $|f'(x)| \leq k < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la función,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x)),$$

es un difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^2$.

3. [15 ptos] Sea $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal que satisface

$$T(e_1) = 3e_1 + ie_2, \quad T(e_2) = -ie_1 + 3e_2, \quad T(e_3) = 4e_3, \qquad \text{con} \qquad i^2 = -1.$$

(a) Determine la matriz de T en la base canónica.

(b) Encuentre los valores y vectores propios de T.

4. [15 ptos] Una curva que tiene una pendiente dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, pasa por el punto $(2, 1)$. Determine su ecuación de la curva.